Universität Osnabrück / FB6 / Theoretische Informatik — Prof. Dr. M. Chimani

Informatik D: Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur — SoSe 2016 — 11. Juli 2016

Haupttermin, Prüfungsnr. 1007049 — Gruppe: Bud Spencer / Carlo Pedersoli

Unbedingt ausfüllen

Matrikelnummer | Studiengang/Abschluss | Fachsemester

Nachname | Vorname

Unterschrift | Identifikator (Beliebiges Wort zur Identifikation im anonymen Notenaushang)

Grundregeln

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**.
- Sie schreiben diese Klausur **vorbehaltlich** der Erfüllung der **Zulassungsvoraussetzung**. Das heißt: Wir werden Ihre Zulassung vor Korrektur prüfen; die Tatsache, dass Sie die Klausur mitschreiben, bedeutet keine implizite Zulassung.
- Es sind **keine Unterlagen** und auch **keine** anderen **Hilfsmittel** erlaubt.
- Benutzen sie nur dokumentenechten (blauen oder zur Not schwarzen) **Kugelschreiber**! Bleistiftlösungen werden nicht gewertet!
- Es zählt die Antwort, die sich im dafür vorgesehenen Kästchen befindet! Soll eine andere Antwort gewertet werden, so ist diese **eindeutig** zu kennzeichnen!
- Jegliches Schummeln, und auch der Versuch desselben, führt zum Ausschluss von der Klausur und einer Bewertung mit **5,0**.

Wird vom Korrektor/Prüfer ausgefüllt

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ
Punkte (max)	12	10	10	12	12	12	12	16	8	12	20	**136**
Punkte (erreicht)												

Punkte	0..67	68..75	76..83	84..88	89..94	95..99	100..104	105..110	111..115	116..123	124..136
Note	**5,0**	**4,0**	**3,7**	**3,3**	**3,0**	**2,7**	**2,3**	**2,0**	**1,7**	**1,3**	**1,0**

Note:

Aufgabe 1: Chomsky-Hierarchie **(12 Punkte)**

Zu jeder Sprachfamilie gibt es entsprechende Automatentypen und Grammatiken. Sei V die Menge der Variablen und Σ die Menge der Symbole. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Name der Sprachfamilie	Automatentyp(en)	Form der Grammatikregeln
		$(V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^* \to (V \cup \Sigma)^*$
	NDKA-AdLK, NDKA-AdEZ	
kontextsensitiv		

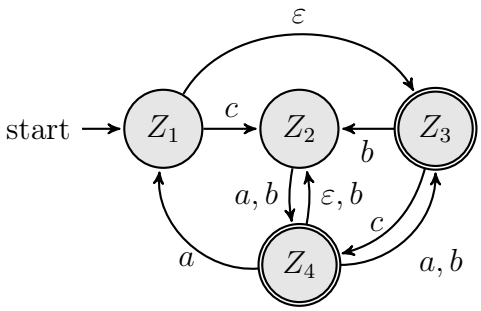
Aufgabe 2: Sprachen klassifizieren **(10 Punkte)**

Zu welcher Sprachklasse gehören die folgenden Sprachen? Kreuzen Sie dabei *alle* korrekten Antworten an. (Hinweis: Typ 3 = regulär.)

	Typ 3	Typ 2	Typ 1	Typ 0
$\Sigma^* \setminus L$, wobei L endlich ist	☐	☐	☐	☐
$\{1^n 0^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } 2^n = n^2\}$	☐	☐	☐	☐
$\{\mathbb{W}(M) \mid M \text{ ist eine TM mit } \mathcal{L}(M) = \varnothing\}$	☐	☐	☐	☐
$\{w \mid w \text{ ist eine logische Formel mit mindestens drei Variablen}\}$	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 3: Umwandlung: NDEA → DEA **(10 Punkte)**

Wandeln Sie den folgenden endlichen Automaten – gemäß dem Vorgehen aus der Vorlesung – in einen deterministischen endlichen Automaten um.



Aufgabe 4: Deterministisch kontextfreie Sprache **(12 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die durch die folgenden Regeln eingeschränkte Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{b, d, p, q\}$ *deterministisch* kontextfrei ist:

- Es kommen mindestens so viele b's wie d's vor.
- Jedes Wort endet mit einem p.

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatik **(12 Punkte)**

Geben Sie eine Chomsky-Normalform zu folgender Grammatik an:

$$S \to ABCd \mid AS \qquad B \to A \mid BCd \mid a$$
$$A \to ba \mid B \qquad C \to A \mid B \mid a \mid c$$

Anmerkung zur Korrektur: Sie müssen nicht genau den Schritten aus der Vorlesung folgen (teilweise wäre dies aber empfehlenswert).

Aufgabe 6: Pumping Lemma **(12 Punkte)**

(a) Definition (4 Punkte)

Wie lautet das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen?

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann...

... $z = uvwxy$ mit den Eigenschaften

(1) ,

(2) und

(3) .

(b) Anwendung (8 Punkte)

Vervollständigen Sie den Beweis, dass die Sprache $L := \{a^j b^{\lfloor k/2 \rfloor} c^{\lceil k/3 \rceil} \mid j \geq k \geq 6\}$ nicht kontextfrei ist.

Angenommen, .
Dann wären die Eigenschaften des Pumping Lemmas erfüllt und n die Wortmindestlänge.

Betrachte das Wort $z =$ $\in L$, $|z| \geq n$.

Wegen Eigenschaft kann vwx nur aus höchstens zwei unterschiedlichen Symbolen bestehen, aber nicht gleichzeitig aus
.

- Falls das Symbol c in vx enthalten ist, kann man i gemäß Eigenschaft so hoch wählen, dass in $uv^i wx^i y$
  .
- Sonst, falls das Symbol b in vx enthalten ist, sind in
  zu viele c's gegenüber b's.
- Schließlich, falls nur a's in vx enthalten sind, sind
  .

Aufgabe 7: Rechnende Turingmaschine **(12 Punkte)**

Sei $\Sigma = \{\mathtt{1}, \mathtt{2}\}$. Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Ziffern der Eingabe absteigend sortiert. Die Eingabe ist ein Wort aus Σ^*. Im Definitionsbereich der Funktion liegen nur jene Ziffernfolgen, bei denen die Ziffern aufsteigend sortiert vorliegen. Beachten Sie, dass auch ε eine Eingabe im Definitionsbereich ist.

Beispiel: Aus der Eingabe `111122` wird die Ausgabe `221111` generiert.

Aufgabe 8: Zusammenhänge **(16 Punkte)**

In jeder Teilaufgabe führt genau ein Kreuz zu einer wahrheitsgemäßen Aussage. Kreuzen Sie die korrekten Aussagen an.
Achtung: Pro Teilaufgabe gibt es $2/0/-1$ *Punkte bei einer richtigen/keinen/falschen Antwort! Es gibt jedoch keine negativen Punkte für die gesamte Aufgabe.*

Um das Theorem von Cook-Levin zu beweisen, ...

- ☐ ...nutzt man eine Reduktion vom Halteproblem auf das Formelerfüllbarkeitsproblem.
- ☐ ...reicht es zu zeigen, dass eine boolesche Formel nicht erfüllbar ist.
- ☐ ...zeigt man, wie akzeptierende TMen von booleschen Formeln simuliert werden.

Eine Ja-Instanz J für ein Entscheidungsproblem in NP hat einen Zeugen, der ...

- ☐ ...eine polynomiell große Nein-Instanz ist.
- ☐ ...deterministisch in Polynomialzeit auf Korrektheit überprüft werden kann.
- ☐ ...deterministisch in polynomieller Zeit erzeugt werden kann.

Aus $\mathsf{P} = \mathsf{Co\text{-}NP}$ folgt, dass ...

- ☐ ...auch $\mathsf{Co\text{-}NPC} = \mathsf{Co\text{-}NP}$ gilt.
- ☐ ...alle $\mathsf{Co\text{-}NP}$-schweren Probleme deterministisch in polynomieller Zeit lösbar sind.
- ☐ ...es keine $\mathsf{Co\text{-}NP}$-schweren Probleme gibt.

Wir betrachten eine SubsetSum-Instanz (A, b), wo alle Zahlen $\leq |A|$ sind. Diese Instanz ...

- ☐ ...ist eine Ja-Instanz.
- ☐ ...ist eine Nein-Instanz.
- ☐ ...kann man deterministisch in polynomieller Zeit entscheiden.

In NP liegt ...

- ☐ ...ganz P.
- ☐ ...nichts aus P.
- ☐ ...eine echte Teilmenge von P.

Indem wir zeigen, wie wir eine TM mit einer Programmiersprache namens CthulhuFighter simulieren können, beweisen wir, dass ...

- ☐ ...eine Turingmaschine mehr berechnen kann als ein CthulhuFighter-Programm.
- ☐ ...Turingmaschinen mindestens so mächtig sind wie CthulhuFighter.
- ☐ ...CthulhuFighter mindestens so mächtig ist wie Turingmaschinen.

NP ist die Komplexitätsklasse, ...

- ☐ ...in der alle Entscheidungsprobleme liegen, deren Co-Probleme in $\mathsf{Co\text{-}NP}$ liegen.
- ☐ ...in der alle NP-schweren Probleme liegen, die nicht NP-vollständig sind.
- ☐ ...in der alle Entscheidungsprobleme liegen, die schwerer als Probleme in P sind.

Es gibt Entscheidungsprobleme in PSPACE, die ...

- ☐ ...auch in NP liegen.
- ☐ ...nicht in $\mathsf{EXPTIME}$ liegen.
- ☐ ...in $\mathsf{NPI} \cap \mathsf{NPC}$ liegen.

Aufgabe 9: Turing-Vollständigkeit **(8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgende Programmiersprache TresorWhile:

TresorWhile-Programme sehen genau wie While-Programme aus. Vor der Ausführung eines TresorWhile-Programms wird allerdings ein Tresor mit Münzen gefüllt. Wieviele Münzen dies sind, hängt von den Anweisungen im TresorWhile-Programm ab (siehe unten).

Seien $x_1, x_2, \ldots$ Variablen für natürliche Zahlen. Seien $c \in \mathbb{N}$ Konstanten. Es gibt die folgenden Anweisungen und diese tragen wie folgt zum Tresor bei:

Anweisung	Funktionsbeschreibung	Münzen
$x_i := c$	Zuweisung	1
$x_i := x_j \pm c$	Addition, Subtraktion	$c+1$
while$(x_i \neq c)$ { ... }	While-Schleife	i^2
if $(x_i \neq c)$ { ... } else { ... }	Bedingtes Ausführen	$i+c$

Die Anweisungen werden mit **;** verkettet. Die Ausführung einer Anweisung kostet immer genau eine Münze, d. h. vor jedem ausgeführten Schritt wird eine aus dem Tresor entnommen. Die Verkettung trägt nichts zum Tresor bei und kostet auch nichts.

Das TresorWhile-Programm hält an, wenn die aktuelle Anweisung nicht bezahlt werden kann. Es kann – wie ein gewöhnliches While-Programm – schon vorher anhalten.

Beispiel: Das folgende TresorWhile-Programm hat $1+1+3^2+6+2 = 19$ Münzen im Tresor und berechnet $x_2 := 5 \cdot x_1$ für $x_1 \leq 5$ und $x_2 := 30$ sonst:

$$x_2 := 0; \quad x_3 := x_1 + 0; \quad \text{while}(x_3 \neq 0) \{ \quad x_2 := x_2 + 5; \quad x_3 := x_3 - 1 \quad \}$$

(a) Definition (4 Punkte)

Definieren Sie Turing-Vollständigkeit.

(b) Turing-Vollständigkeit (4 Punkte)

Ist TresorWhile Turing-vollständig? Begründen Sie!

Aufgabe 10: Entscheidbarkeit / Algorithmische Fragestellungen (12 Punkte)

DEAs und DLBAs können – analog zu Turingmaschinen, wie aus der Vorlesung bekannt – als Wort dargestellt werden. Für DLBAs $\mathcal{M}$ nutzen wir diese Kodierung $\mathbb{W}(\mathcal{M})$.

Sei A ein DEA mit Zuständen $Z_1, \ldots, Z_\alpha$, wobei Z_1 der Startzustand ist und die letzten β Zustände Endzustände sind. Sei $\Sigma := \{a_1, \ldots, a_\gamma\}$. Es gibt δ Übergänge $U_1, \ldots, U_\delta$. Einen Übergang U_k von Z_i nach Z_j mit dem Symbol a_m kodieren wir als $\mathbb{U}(U_k) := \mathbb{B}(i) \diamond \mathbb{B}(j) \diamond \mathbb{B}(m)$. Dann definieren wir $\mathbb{W}_{\text{DEA}}(A) := \mathbb{B}(\alpha) \diamond \mathbb{B}(\beta) \diamond \mathbb{B}(\gamma) \diamond \mathbb{B}(\delta) \diamond \mathbb{U}(U_1) \diamond \cdots \diamond \mathbb{U}(U_\delta)$.

(a) (Un-)Entscheidbarkeit (4 Punkte)

Sei $L := \{\mathbb{W}_{\text{DEA}}(A) \mid A \text{ ist ein DEA, dessen Zustände alle erreichbar sind}\}$. Ist L entscheidbar? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

(b) Halteproblem (4 Punkte)

Wir betrachten beliebige DLBAs $\mathcal{M}$ mit n Zuständen und Bandalphabet Γ. Es existiert eine berechenbare Funktion $g(\mathcal{M}, \ell) = \mathcal{O}(n \cdot \ell \cdot |\Gamma|^\ell)$, die die Anzahl der Schritte angibt, die ein DLBA, der auf einer Eingabe der Länge ℓ hält, maximal machen kann. Warum?

(c) Semi-Entscheidbarkeit (4 Punkte)

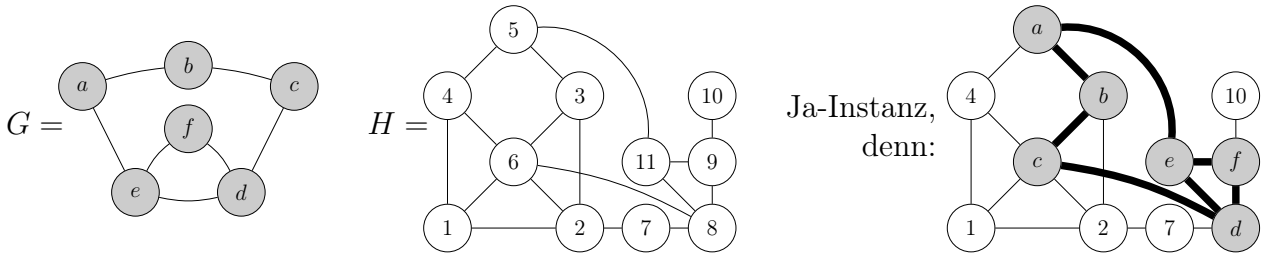
Sei $L' := \{\mathbb{W}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M}$ ist ein DLBA, dessen Zustände alle erreichbar sind$\}$.
Zeigen Sie, dass L' semi-entscheidbar ist. Nutzen Sie dazu die Funktion $g(\mathcal{M}, \ell)$ aus Aufgabe **(b)**.

Aufgabe 11: ***NP*-Vollständigkeit** **(20 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende Problem:

Problem: OhDaBinIch (ODBI)
Gegeben: Zwei ungerichtete Graphen $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$
Frage: Ist G (unter Umbenennung der Knoten) in H enthalten?

Ein Beispiel für eine Ja-Instanz ist die folgende Eingabe:



Wir wollen im Folgenden zeigen, dass OhDaBinIch *NP*-vollständig ist.

Solch ein Beweis besteht typischerweise aus zwei Teilen. Was zeigen wir in Beweisteil 1?

Da es eine offene Frage ist, ob das verwandte Problem GraphIsomorphie in ***P*** liegt (es ist ein Kandidat für ***NPI***), reicht es nicht aus, als Zeuge für OhDaBinIch nur die Knoten und Kanten aus G in H ohne Beschriftung zu markieren.

Beschreiben Sie einen geeigneten Zeugen für unser Problem und führen Sie Beweisteil 1 durch.

Beweisteil 1.

Für Beweisteil 2 benötigen wir ein weiteres Problem. Welches wählen Sie?

☐ Partition ☐ HamiltonKreis ☐ Sat ☐ GraphZusammenhang

Definieren Sie dieses Problem.

Führen Sie nun Beweisteil 2 aus und begründen Sie alle notwendigen Eigenschaften.

Beweisteil 2.

Viel Erfolg!