Standardformen für affine Quadriken

Gegeben sei eine affine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ durch ihre definierende Gleichung $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Diese Gleichung hat die Form

$$0 = F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i + \delta.$$

Gesucht wird nun nach einer Koordinatentransformation, sodass F eine der folgenden drei Formen annimmt:

1. Standardform: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_m x_m^2 = 0,$
2. Standardform: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_m x_m^2 + 2\gamma x_{m+1} = 0,$
3. Standardform: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_m x_m^2 + \gamma = 0,$

wobei $1 \leq m \leq n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \neq 0$. Im zweiten Fall ist $m \leq n - 1$.

Vorbemerkung: Es ist $(a_1 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j$. Beweis: Selber nachrechnen! Nach obiger Gleichung gilt daher auch

$$X^2 + a_1 X + a_2 X + ... + a_r X = Y^2 - \tfrac{1}{4}(a_1 + ... + a_r)^2, \tag{1}$$

für $Y = X + \frac{1}{2}(a_1 + ... + a_r)$.

Affine Quadriken auf Standardform bringen

1. Schritt: Gibt es ein i mit $\alpha_i \neq 0$? Wenn *ja*, dann zu **Schritt 2**; sonst zu **Schritt 3**.
2. Schritt: Es ist $\alpha_i \neq 0$ für ein i. OBdA ist $\alpha_1 \neq 0$. Setze $y_1 = x_1 + w$ für $w = \frac{1}{2\alpha_1}(\gamma_1 + \sum_{j>1} \beta_{1j} x_j)$. Dann lautet nach Gleichung (1) die Quadrik-Gleichung jetzt $\alpha_1 y_1^2 + K = 0$ für

   $$K = \sum_{i>1} \alpha_i x_i^2 + \sum_{1<i<j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i>1} \gamma_i x_i + \delta - \alpha_1 w^2.$$

   In K kommen nur $x_2, \ldots, x_n$ vor. Jetzt wenden wir **Schritt 1** auf $K = 0$ an.
3. Schritt: Es ist $\alpha_i = 0$ für jedes i. Ist auch jedes $\beta_{ij} = 0$? Wenn *nein*, dann zu **Schritt 4**; sonst zu **Schritt 5**.
4. Schritt: Jedes $\alpha_i = 0$, aber ein $\beta_{ij} \neq 0$. OBdA ist $\beta_{12} \neq 0$. Setze $x_2' = x_1 - x_2$ und substituieren es für x_2 in der Gleichung. Jetzt kommt garantiert x_1^2 in der Gleichung vor. Gehe zu **Schritt 2**.
5. Schritt: Es sind die restlichen $\alpha_i = \beta_{ij} = 0$ für jedes i, j. Wir sind rekursiv abgestiegen und haben Variablenwechsel durchgeführt, d. h. die Gleichung hat im Moment die Form $\alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_m y_m^2 + K = 0$, wobei das K den aktuellen Rest durch die Rekursion meint. Sind jetzt $\gamma_i = 0 \forall i$ so sind wir **fertig**, denn für $\delta = 0$ sind wir in der *ersten Standardform*, sonst in der *dritten Standardform*. Angenommen es gibt ein i sodass $\gamma_i \neq 0$. OBdA ist $i = m + 1$. Wir setzen nun

   $$x_{m+1}^{(\text{neu})} := x_{m+1}^{(\text{alt})} + \frac{1}{\gamma_{m+1}} \left(\sum_{j=m+2}^{n} \gamma_j x_j^{(\text{alt})} + \delta \right),$$

   dann sind wir in der *zweiten Standardform* und **fertig**.

Beispiel 1. Wir betrachten die Quadrik $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2 + 3 = 0$.

1. Schritt: Es ist $\alpha_1 = 1 \neq 0$, also zu Schritt 2
2. Schritt: Setzen $y_1 := x_1 + w$ für $w = \frac{1}{2}(0 - 2x_2) = -x_2$. Damit ist die neue Gleichung $y_1^2 + K = 0$ für
$$K = 2x_2^2 + 4x_2 + 3 - w^2 = x_2^2 + 4x_2 + 3$$
und wir gehen mit $K = 0$ zurück zu Schritt 1
1. Schritt: Unsere Gleichung ist $x_2^2 + 4x_2 + 3$, d. h. es ist $\alpha_1 = 1 \neq 0$, also zu Schritt 2
2. Schritt: Setzen $y_2 = x_2 + w$ für $w = \frac{1}{2}(4) = 2$. Nun ist $K \equiv -1$ und zurück zu Schritt 1
1. Schritt: Alle Koeffizienten vor den quadratischen Termen sind 0 (wir haben ja keine), also zu Schritt 3
3. Schritt: Auch alle Koeffizienten vor den gemischten Termen sind 0 (wir habe ja keine), also zu Schritt 5
5. Schritt: Auch alle γ_i sind 0 (wir haben ja keine einzelnen Terme), also fertig.

Die Quadrik hat die Standardform $y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$. ⌟

Beispiel 2 (zu Schritt 4). Es sei $xy - 2xz + 3yz + x = 0$ unsere aktuelle Gleichung. Setzen wir $y' = x - y$ und substituieren dies für y so erhalten wir: $x^2 - xy + xz - 3yz + x = 0$. Damit müssen wir wieder in Schritt 1 gehen. ⌟

Beispiel 3. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^4$ die affine Quadrik gegeben durch $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_3x_4 + 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0$.

1. Schritt: Es ist $\alpha_1 = 1 \neq 0$, also zu Schritt 2
2. Schritt: Wir setzen $y_1 := x_1 + w$, wobei $w = \frac{1}{2\alpha_1}(\gamma_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \beta_{14}x_4) = \frac{1}{2}(4 + 2x_3 - 2x_4) = x_3 - x_4 + 2$. Damit ist $y_1 = x_1 + x_3 - x_4 + 2$. Die neue Gleichung der Quadrik ist $0 = \alpha_1 y_1^2 + K = y_1^2 + K$, wobei nun gilt:
$$K = -2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_3x_4 + 2x_2 + 2x_3 + 1 - w^2 = -2x_2^2 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 3$$
Mit der Gleichung $K = 0$ gehen wir wieder in Schritt 1:
1. Schritt: In K ist $\alpha_1 = -2 \neq 0$, also gehen wir in Schritt 2:
2. Schritt: Wir setzen $y_2 := x_2 + w$ mit $w = \frac{1}{2(-2)}(2) = -\frac{1}{2}$, also $y_2 := x_2 - \frac{1}{2}$. Die neue Gleichung der Quadrik ist $0 = y_1^2 + \alpha_1 y_2^2 + K = y_1^2 - 2y_2^2 + K$ für
$$K = -2x_3 + 4x_4 - 3 - \alpha_1 w^2 = -2x_3 + 4x_4 - 3 + 2(\tfrac{1}{2})^2 = -2x_3 + 4x_4 - \tfrac{5}{2}$$
Mit der Gleichung $K = 0$ gehen wir wieder in Schritt 1:
1. Schritt: Es gibt keine quadratischen Terme mehr, also zu Schritt 3:
3. Schritt: Es sind auch alle übrigen $\beta_{ij} = 0$, denn es gibt ja keine „Mischterme“, also zu Schritt 5:
5. Schritt: Es ist $0 = K = -2x_3 + 4x_4 - \frac{5}{2}$ daher setzen wir:
$$y_3 := x_3^{(\text{neu})} = x_3^{(\text{alt})} + \frac{1}{\gamma_3}(\gamma_4 x_4^{(\text{alt})} + \delta) = x_3 - 2x_4 + \frac{5}{4}$$
Damit ist $\gamma_3 y_3 = -2y_3 = K$.

Insgesamt erhalten wir $0 = y_1^2 - 2y_2^2 + K = y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3$, damit haben wir die Quadrik auf die zweite Standardform gebracht. Nennen wir diese neue Form Q' so lesen wir aus den y_i ab, dass $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 - x_4 + 2, x_2 - \frac{1}{2}, x_3 - 2x_4 + \frac{5}{4}, x_4)$ zwischen Q' und Q vermittelt. Es ist $f(Q) = Q'$. ⌟