Übersicht der GDGL-Typen und Lösungsansätze

Kap.-Nr.	allg. Gestalt	Ansatz
I.2	$y' = f(x) \cdot g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
I.3 (a)	$y' = h(ax + by + c)$	Substitution: $z(x) := ax + by + c$ $\rightarrow z' = a + b \cdot h(z)$ (Typ I.2)
I.3 (b)	$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$	Substitution: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ $\rightarrow z' = (h(z) - z) \cdot \frac{1}{x}$ (Typ I.2)
I.3 (c)	$y' = h\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$	Sonderfall: $\alpha = \beta = 0$ $\rightarrow$ Typ I.3 (a) 1. Fall: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$ -) $\beta = 0$ $\rightarrow y' = h\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)$ (Typ I.2) -) $\alpha = 0$ $\rightarrow y' = h\left(\frac{by+c}{\beta y+\gamma}\right)$ (Typ I.2) -) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$ Substitution $z(x) = \alpha x + \beta y(x)$ $\rightarrow$ $z' = \alpha + \beta h\left(\frac{\lambda z+c}{z+\gamma}\right)$ mit $\lambda = \frac{\alpha}{a}$ (Typ I.2) 2. Fall: 1) LGLS lösen: $a\xi + b\eta + c = 0 \ \wedge \ \alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$ 2) Substitution: $x := u + \xi, \quad y := v + \eta$ $\rightarrow$ $v' = h\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{\alpha+\beta\frac{v}{u}}\right)$ (Typ I.3b)
I.4	$y' + p(x)y = q(x)$	Allgemeine Lösung: $y_{\text{inh}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_p(x)$ y_{hom}: $y' = -p(x)y$ (Typ I.2) y_p: Variation der Konstanten
I.5 (a)	$y' = \alpha(x)y + \beta(x)y^k$	Substitution: $z := y^{1-k} \rightarrow z' - (1-k)\alpha(x)z = (1-k)\beta(x)$ (Typ I.4)
I.5 (b)	$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$	Part. Lösung y_p muss bekannt sein, dann ist die allg. Lösung: $y = y_p + u$ mit $u' = \left[2f(x)y_p + g(x)\right]u + f(x)u^2$ (Typ I.5a) oder $y = y_p + \frac{1}{z}$ mit $z' = -\left[2f(x)y_p + g(x)\right]z - f(x)$ (Typ I.4)
I.6	$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$	1. Fall: $\partial_y P = \partial_x Q$ allg. Lösung implizit geg. durch $F(x,y) = 0$ mit $\partial_x F(x,y) = P(x,y)$ und $\partial_y F(x,y) = Q(x,y)$ Ansatz: $G(x,y) := \int Q(x,y)dy$, $\rightarrow F(x,y) = G(x,y) + \varphi(x)$ mit $\varphi'(x) = P(x,y) - \partial_x G(x,y)$ 2. Fall: DGL mit einem integr. Faktor $M(x,y)$ multiplizieren. [1]

Typ III.3

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y \qquad a_j \in \mathbb{R} \qquad \text{(homogen:) } L[y] = 0$$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$ $\rightarrow$ $L[e^{\lambda x}] = p(\lambda)e^{\lambda x}$ $\rightarrow$ $p(\lambda) = 0$
Nullstellen von p: reell: λ_i mit Vielfachheit l_i, sowie komplex konjugiert: $z_t = a_t + ib_t$ mit Vielfachheit m_t $\rightarrow$ FS:

$$\begin{array}{llllll}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x}, & & \text{bis} \\
e^{\lambda_i x}, & xe^{\lambda_i x}, & \ldots, & x^{l_i-1}e^{\lambda_i x}, & & \\
e^{a_1 x}cos(b_1 x), & e^{a_1 x}sin(b_1 x), & \ldots, & x^{m_1-1}e^{a_1 x}cos(b_1 x), & x^{m_1-1}e^{a_1 x}sin(b_1 x), & \text{bis} \\
e^{a_t x}cos(b_t x), & e^{a_t x}sin(b_t x), & \ldots, & x^{m_t-1}e^{a_t x}cos(b_t x), & x^{m_t-1}e^{a_t x}sin(b_t x), &
\end{array}$$

III.4 - Spezialansätze

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = Q(x)$$

Rechenweg: Spezialansatz y_p für jeweiliges Q in die Dgl. einsetzen, Koeffizientenvergleich.

$Q(x)$	Ansatz: $y_p =$	Bedingung
$b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$	$B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m$	charPoly(0) $\neq 0$
	$x^k(B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)$	0 ist k-fache Nullst.
$(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)e^{\lambda x}$	$(B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)e^{\lambda x}$	charPoly(λ) $\neq 0$
	$x^k(B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)e^{\lambda x}$	λ ist k-fache Nullst.
$(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)\begin{cases} cos(\beta x) \\ sin(\beta x) \end{cases}$	$(B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)cos(\beta x) + (C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m)sin(\beta x)$	$p(i\beta) \neq 0$
	$x^k\left[\begin{array}{l} (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)cos(\beta x) \\ +(C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m)sin(\beta x) \end{array}\right]$	$i\beta$ ist k-fache Nullst.
$e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)\begin{cases} cos(\beta x) \\ sin(\beta x) \end{cases}$	$e^{\alpha x}\left[\begin{array}{l} (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)cos(\beta x) \\ +(C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m)sin(\beta x) \end{array}\right]$	$p(\alpha + i\beta) \neq 0$
	$x^k e^{\alpha x}\left[\begin{array}{l} (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)cos(\beta x) \\ +(C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m)sin(\beta x) \end{array}\right]$	$\alpha + i\beta$ ist k-fache Nullst.

Typ III.5

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = Q(x)$$

Ansatz: Substitution: $t = \ln x$ $\rightarrow$ $y(x) = z(\ln x)$ in die Dgl. einsetzen $\rightarrow$ Typ III.3
Lin. Dgl. für $z(t)$ lösen (inkl. inhom.) und zurücksubstituieren.

III.6 - Reduktion der Ordnung

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_1(x)y' + P_0 y = 0$$

Ansatz: ist $u_1(x)$ eine Lösung, so führt $y(x) = u_1(x)\int z(x)$ auf eine lin. Dgl. für $z(x)$. Die Lösungen $z_1, \ldots, z_m$ dieser lin. Dgl. bilden durch $u_1(x), u_1(x)\int z_1(x)dx, \ldots, u_1(x)\int z_m(x)dx$ ein FS der Ausgangsgleichung.

III.7 - Potenzreihenansatz

$$\text{allgemeiner Ansatz:} \qquad y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \qquad \text{für AWP: } x_0 \text{ besetzen, sonst } x_0 = 0$$

Rechenweg: 1) Ansatz in die Dgl. einsetzen, 2) Indexverschiebung zur Form $(\ldots) + \sum_{k=k_0}^{\infty}(\ldots)$, 3) Koeffizientenvergleich um Abhängigkeiten der a_k zu finden, 4) bei AWP: Abhängigkeit zu a_0 bzw. a_1 finden.

III.8 - Rand- und Eigenwertprobleme

Randwertprobleme: $Ly := y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$ mit allg. Lösung: $y_{inh} = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + y_p(x)$ y_{inh} in die Randbedingungen $R_1y = d_1, R_1y := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a)$ und $R_2y = d_2, R_2y := \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b)$ eingesetzt ergibt ein LGLS für c_1, c_2. Lösen falls möglich.

Eigenwertprobleme: $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ durch Multiplikation mit $p(x) := e^{\int p_1(x)dx}$, wenn wir def. $q(x) := p(x) - p_0(x)$ zurückführen auf

$$Ly := (p(x)y')' + q(x)y.$$

Lösen der Differentialgleichung $Ly + \lambda y = 0$ und des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von λ. Dabei entstehen meist Fallunterscheidungen, wobei nichttriviale Lösungen für y gesucht werden. Auflösen der Gleichungen nach λ und Einsetzen in y.

Typ III.9

$$y'' = f(x, y, y')$$

-) $y'' = f(x)$: zweimal integrieren

-) $y'' = f(y')$: Substitution: $z = y' \to z' = f(z)$

-) $y'' = f(y)$: Multiplikation mit $2y' \to$ $F(s) := \int f(s)ds + c \to (y')^2 = 2F(y) + d$ (Typ I.2)

-) $y'' = f(x, y')$: Substitution $z = y'$

-) $y'' = f(y, y')$: $p(y) := y'(x(y)) \to \dot{p} = \frac{f(y,p)}{p}$ Dgl. nach p lösen. Gesamtlsg. impl. geg. durch $\int \frac{dy}{p(y)} = x + C$.

-) $y'' = f(x, y)$: keine allg. Regel: nur Spezialfälle[2]

IV - Lineare Dgl.-systeme 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + Q_1(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + Q_n(x) \end{aligned}$$

Rechenweg: 1) Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV) der Koeffizientenmatrix $K = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ berechnen.

FS:

Vielfachheit des EW λ	Element des Fundamentalsystems
1	$u_i = \begin{pmatrix} \vert \\ EV(\lambda) \\ \vert \end{pmatrix} e^{\lambda x}$
m	u_i wie oben, Rest: Ansatz $u_{i+1} \ldots$ in die Dgl. einsetzen um Koeffizienten zu ermitteln: $u_{i+1} = \begin{pmatrix} ax+b \\ \vdots \\ \alpha x+\beta \end{pmatrix} e^{\lambda x}$, $u_{i+2} = \begin{pmatrix} ax^2+bx+c \\ \vdots \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma \end{pmatrix} e^{\lambda x}, \ldots$ $u_{i+(m-1)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k x^k \end{pmatrix} e^{\lambda x}$

2) homogene Lösung: $y_{hom} = c_1\vec{u_1}(x) + \ldots + c_n\vec{u_n}(x)$ 3) inhomogene Lösung:
3a) Variation der Konstanten: mit Ansatz $y_p = \vec{c_1}(x)\vec{u_1}(x) + \ldots + \vec{c_n}(x)\vec{u_n}(x)$ in das Dgl.-system.
3b) Ansatzverfahren zur entsprechenden Inhomogenität $Q_i(x)$ nach III.4. *Beachte: Für den Fall „k-fache Nullst." ist im Ansatz der Grad des Polynoms um k zu erhöhen, und nicht nur mit x^k zu multiplizieren!*

[2]-) Spezialfall 1: $y'' = g(x)y$, Spezialfall 2: $y'' = h\left(x, \frac{y'}{y}\right)y$ $\to$ Substitution: $v(x) := \frac{y'(x)}{y(x)}$ führt auf die Dgl. 1. Ordnung: $v' = h(x, v) - v^2$